

К УСТОЙЧИВОСТИ ОСНОВНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХМАЯТНИКОВОГО АВТОБАЛАНСИРА*

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А.Ф.Улитко)

Dynamic stability of the main motion of a two-pendulum autobalancing device is studied within the plane model. The sufficient conditions of asymptotic stability are found for the cases where the pendulum mass, is much less than that of the rotor at large friction between pendulums and the rotor shaft, under large external damping, and under high-speed rotation of the rotor. For small damping, one or three critical speeds are found and the region of stability of the main motion is constructed which is independent of disbalance of the rotor.

В работах, посвященных динамике маятниковых (шаровых) автобаланси́ров [1-4], в рамках плоской модели изучалась устойчивость основного движения в предположении, что масса маятников намного меньше массы ротора. При помощи метода малого параметра в первом приближении устанавливалось существование одной критической скорости, совпадающей с резонансной частотой. В настоящей работе наряду с классическим исследуются и другие практически важные случаи: быстровращающегося ротора, большого трения между маятниками и валом, большого внешнего трения, отсутствия сил сопротивления.

В рамках плоской модели ротор – симметричный плоский диск массы M , насаженный с эксцентриситетом e на абсолютно жесткий вал, перпендикулярный его плоскости (рис. 1). Маятники – невесомые стержни длиной l , несущие на своем конце сосредоточенные массы m . Положения маятников относительно ротора определяются углами ϕ , ψ , отсчитываемыми относительно оси V . Первая ось U проходит через вал – точку O и центр масс ротора – точку C . Вторая ось V проходит через точку O и перпендикулярна оси U . Положение вала определяется координатами x , y относительно осей X , Y выходящих из оси вращения – точки K и параллельных соответственно осям U , V . Повороту маятника вокруг вала препятствует момент сил вязкого сопротивления $H_1\dot{\phi}$ или $H_1\dot{\psi}$. При неподвижном роторе вал совмещен с осью вращения. В процессе движения вал (точка O) отклоняется от оси вращения (точки K) и на него начинают действовать восстанавливающая сила – $c\mathbf{r}$ и сила вязкого сопротивления среды $-H_2\mathbf{v}$ (здесь $\mathbf{r}=\mathbf{KO}$, $\mathbf{v}=\mathbf{dr}/dt$). Предполагается, что ротор вращается вокруг оси вращения с постоянной угловой скоростью вращения ω .

Ниже записаны уравнения движения в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi + H(\dot{\xi} - R_\omega \eta) + \xi - R_m[\ddot{\psi} \cos \psi + \ddot{\phi} \cos \phi - 2R_\omega(\dot{\psi} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \phi) - \dot{\psi}^2 \sin \psi - \\ - \dot{\phi}^2 \sin \phi + R_\omega^2(2 \sin \psi_0 - \sin \psi - \sin \phi)] = 0, \\ \ddot{\eta} - 2R_\omega \dot{\xi} - R_\omega^2 \eta + H(\dot{\eta} + R_\omega \xi) + \xi - R_m[\ddot{\psi} \sin \psi + \ddot{\phi} \sin \phi + 2R_\omega(\dot{\psi} \cos \psi + \dot{\phi} \cos \phi) + \dot{\psi}^2 \cos \psi - \\ - \dot{\phi}^2 \sin \phi + R_\omega^2(\cos \psi - \cos \phi)] = 0, \\ \ddot{\psi} + h\dot{\psi} - (\ddot{\eta} + 2R_\omega \dot{\xi} - R_\omega^2 \eta) \sin \psi - (\ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi) \cos \psi = 0, \\ \ddot{\phi} + h\dot{\phi} + (\ddot{\eta} + 2R_\omega \dot{\xi} - R_\omega^2 \eta) \sin \phi - (\ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi) \cos \phi = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$R_\omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad R_m = \frac{m}{M_\Sigma}, \quad H = \frac{H_2}{\omega_0 M_\Sigma}, \quad h = \frac{H_1}{ml^2 \omega_0}, \quad \sin \psi_0 = \frac{Me}{2ml} \quad (2)$$

и

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad r = \omega_0 t, \quad (M_\Sigma = 2m + M, \quad \omega_0^2 = c / M_\Sigma). \quad (3)$$

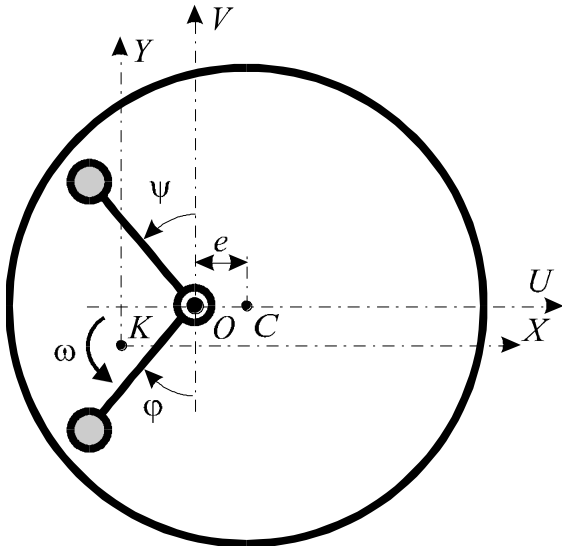


Рис. 1.

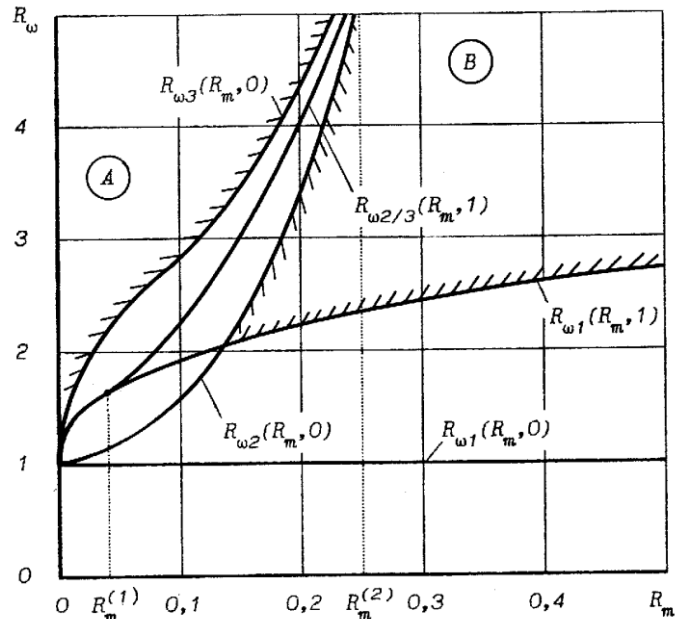


Рис. 2.

В (2) определены безразмерные параметры, в (3) – безразмерные переменные. Угол ψ_0 определяет положение маятников, в котором они уравнивают ротор ($\phi = \psi = \psi_0$, $Me < 2ml$).

С математической точки зрения для функционирования автобалансира необходимо, чтобы основное движение

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \psi = \psi_0, \quad \phi = \phi_0 \quad (4)$$

было асимптотически устойчиво в силу системы дифференциальных уравнений (1) вне зависимости от величины и направления дисбаланса.

Для анализа устойчивости движения исследовались уравнения первого приближения

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi + H(\dot{\xi} - R_\omega \eta) + \xi - \\ - R_m [\ddot{\alpha} \cos \psi_0 + \ddot{\beta} \cos \psi_0 - 2R_\omega (\dot{\alpha} \sin \psi_0 - \dot{\beta} \sin \psi_0) - R_\omega^2 (\alpha \cos \psi_0 - \beta \cos \psi_0)] = 0, \\ \ddot{\eta} - 2R_\omega \dot{\xi} - R_\omega^2 \eta + H(\dot{\eta} + R_\omega \xi) + \eta - \\ - R_m [\ddot{\alpha} \sin \psi_0 + \ddot{\beta} \sin \psi_0 + 2R_\omega (\dot{\alpha} \cos \psi_0 + \dot{\beta} \cos \psi_0) - R_\omega^2 (\alpha \sin \psi_0 - \beta \sin \psi_0)] = 0, \\ \ddot{\alpha} + h\dot{\alpha} - (\ddot{\eta} + 2R_\omega \dot{\xi} - R_\omega^2 \eta) \sin \psi_0 - (\ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi) \cos \psi_0 = 0, \\ \ddot{\beta} + h\dot{\beta} - (\ddot{\eta} + 2R_\omega \dot{\xi} - R_\omega^2 \eta) \sin \psi_0 - (\ddot{\xi} - 2R_\omega \dot{\eta} - R_\omega^2 \xi) \cos \psi_0 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь ξ , η , $\alpha = \psi - \psi_0$, $\beta = \phi - \psi_0$ – отклонения от основного движения. Для уравнений (5) характеристическое уравнение имеет вид

$$(a_{11}a_{33} - R_m^2 a_{31}^2)(\bar{a}_{11}a_{33} - R_m^2 \bar{a}_{31}^2) - R_m^2 \cos^2 2\psi_0 a_{31}^2 \bar{a}_{31}^2 = 0,$$

где $a_{11} = (\lambda + iR_\omega)^2 + H(\lambda + iR_\omega) + 1$, $a_{31} = (\lambda + iR_\omega)^2$, $a_{33} = \lambda^2 + h\lambda$, знак сопряжения над a_{ij} к параметру λ не относится. Уравнение (6) совпадает с характеристическим уравнением полученным в [5] для четырехмаятникового автобалансира со связями ($R_m = \varepsilon$, $\cos 2\psi_0 = \delta$). Это позволяет воспользоваться результатами работы и получить следующие достаточные условия асимптотической устойчивости основного движения вне зависимости от величины дисбаланса:

- в случае, когда масса маятника намного меньше массы ротора ($R_m \ll 1$) или в случае большого трения между маятниками и валом ($h \gg 1$)

$$|R_\omega| > 1; \quad (7)$$

- при вращении ротора с частотой, намного выше резонансной ($R_\omega \gg 1$)

$$h > H\sqrt{R_m}; \quad (8)$$

- при большом внешнем трении ($H \gg 1$)

$$4R_m < h, \quad |R_\omega| \in (R_{\omega 1}, R_{\omega 2}), \quad (9)$$

где $R_{\omega 1/2} = \frac{1}{p}(1 \pm (1 - p^2)^{1/2})^{1/2}$, $p = \frac{1}{h}(2R_m)^{1/2}$.

Заметим, что условия (7) – (9) должны выполняться (не выполняться) с точностью до величин, малых по отношению к единице. Поэтому теоретически возможно, что на границе этих условий критическая скорость распадается на нечетное число скоростей, совпадающих в нулевом приближении. Скорость вращения $R_\omega = 1$ соответствует резонансной частоте – частоте собственных колебаний ротора при отсутствии вращения, сил трения и неподвижных маятниках.

При отсутствии сил сопротивления $H = h = 0$ и характеристическое уравнение (6) принимает вид

$$P(x, R_\omega^2, R_m, k) = (a_6 x^3 + a_4 x^2 + a_2 x + a_0)x + k(x + R_\omega^2)^4 = 0, \quad (10)$$

где $a_0 = 2R_m R_\omega^4 (R_\omega^2 - 1)$, $a_2 = (R_\omega^2 - 1)^2 + 2R_m R_\omega^2 (R_\omega^2 + 6)$, $a_4 = 2(1 - R_m)(R_\omega^2 + 1)$, $a_6 = 1 - 2R_m$, $x = \lambda^2$, $k = \sin^2 2\psi_0$.

Устойчивость движения зависит от трех независимых параметров

$$R_m \in (0, 0.5), \quad R_\omega \in [0, +\infty), \quad k \in [0, 1]. \quad (11)$$

Критические скорости – есть функции вида $R_{\omega j} = R_{\omega j}(R_m, k)$. Они разделяют на прямой R_ω области устойчивости в первом приближении и неустойчивости. Не ограничивая общности, считаем, что R_ω , $R_{\omega j}$ – неотрицательны. Для устойчивости движения в первом приближении необходимо, чтобы корни уравнения (10) были отрицательны. Построим в плоскости (R_m, R_ω) область устойчивости в первом приближении, не зависящую от дисбаланса.

При изменении дисбаланса меняется только параметр k . При этом кривая P занимает в плоскости (x, P) наинизшее положение при $k = 0$ и наивысшее – при $k = 1$. Если в этих двух крайних положениях полином P будет иметь все отрицательные корни, то и при любом $k \in (0, 1)$ у полинома все корни будут отрицательны. Заметим, что действительные корни полинома P – монотонные функции от параметра k .

При $k = 0$ полином P принимает вид

$$P(x, R_\omega^2, R_m, k) = (a_6 x^3 + a_4 x^2 + a_2 x + a_0)x.$$

У него один нулевой корень. Для того чтобы все остальные корни были отрицательны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$a_j > 0 \quad (j = 0, 2, 4, 6);$$

$$-a_2^2 a_4^2 + 4a_2^3 a_6 + 27a_0^2 a_6^2 - 18a_0 a_2 a_4 a_6 + 4a_0 a_4^3 \leq 0. \quad (12)$$

Из первой группы условий находим первую критическую скорость

$$R_{\omega 1}(R_m, 0) = 1, \quad (13)$$

которая совпадает с резонансной частотой. Остальные скорости при помощи метода разложения корней полинома со степенями малого параметра [6] находим в виде рядов (корни полинома (12)):

- для $0 < R_m < 0,05$

$$R_{\omega 2}(R_m, 0) = 1 + \frac{49}{16} R_m + \frac{12397}{1024} R_m^2 + \dots$$

$$R_{\omega 3}(R_m, 0) = 1 + 2\left(\frac{R_m}{2}\right)^{1/3} + \frac{7}{3}\left(\frac{R_m}{2}\right)^{2/3} + \frac{29}{8} \frac{R_m}{2} + \dots$$

- для $0,05 \leq R_m < 0,25$

$$R_{\omega 2/3}(R_m, 0) = \frac{1}{8q^2} (1 \pm 2q + \frac{11}{2} q^2 \mp \frac{37}{4} q^3 - \frac{155}{8} q^4 + \dots),$$

$$q = \frac{1}{2} (0,25 - R_m)^{1/2}. \quad (14)$$

Таким образом, при $k=0$ и $0 < R_m < 0,25$ у системы три критические скорости, а при $0,25 < R_m < 0,5$ - только одна. Разложения (14) дают погрешность на интервале $(0, 0,25)$ не более 7%, причем последняя быстро уменьшается при подходе R_m к 0 или 0,25.

При $k=1$ (с $\alpha_0 = 0$) характеристическое уравнение (6) распадается на два уравнения:

$$P_1(R_{\omega}, R_m) = (a_{11}a_{33} - R_m a_{31}^2) = 0, \quad P_2(R_{\omega}, R_m) = (\bar{a}_{11}a_{33} - R_m \bar{a}_{31}^2) = 0, \quad (15)$$

корни которых комплексно сопряжены.

Из условия, что у полинома $P_{1(2)}$ должны быть только мнимые корни, определяется первая критическая скорость:

$$R_{\omega 1}(R_m, 1) = \frac{\sqrt{1-u^2}}{1-2u^2}, \quad R_m = \left(\frac{u^3}{1-2u^2} \right)^{1/2}, \quad (16)$$

где u – параметр. То же в виде разложения по степеням R_m :

$$R_{\omega 1}(R_m, 1) = 1 + \frac{3}{2} s + \frac{7}{8} s^2 + \frac{1}{48} s^3 + \dots, \quad s = (R_m)^{1/3}. \quad (17)$$

Как показывают непосредственные вычисления, разложение (17) равномерно пригодно для вычисления $R_{\omega 1}$ на всем интервале изменения R_m . Относительная погрешность не превышает 1,08% и достигает максимума при $R_m = 0,5$.

Из условия, что у полиномов P_1 и P_2 появляются равные корни, определяются вторая и третья критические скорости:

$$R_{\omega 2/3}(R_m, 1) = \frac{\sqrt{2(1-2R_m)}}{1-4R_m}, \quad R_m^{(1)} < R_m < R_m^{(2)}, \quad (18)$$

где $R_m^{(1)} = 0,04173\dots$, $R_m^{(2)} = 0,25$. При уменьшении параметра k особые точки кривой (18) при $0 < R_m < R_m^{(1)}$ и $R_m^{(2)} < R_m < 0,5$ исчезают. При $R_m^{(1)} < R_m < R_m^{(2)}$ кривая расщепляется на две, определяющие две критические скорости.

На рис. 2 изображены графики критических скоростей при $k=0$ и $k=1$. Первая и вторая критические скорости – монотонно-убывающие функции от параметра k , а третья критическая скорость – монотонно-возрастающая функция. При $k=1$ и $R_m = R_m^{(1)}$ величины трех критических скоростей совпадают. Более того, кривые имеют в этой точке общую касательную. В этом же случае совпадают величины второй и третьей критических скоростей. С уменьшением k кривая $R_{\omega 2/3}(R_m, 1)$ расщепляется на две кривые, определяющие две критические скорости. Движение в первом приближении устойчиво при вращении ротора между первой и второй и над третьей критическими скоростями. Учитывая это и монотонность изменения критических скоростей от параметра k , определяем области

A, B в плоскости (R_m, R_ω) , внутри которых движение в первом приближении устойчиво вне зависимости от величины дисбаланса. Это область A над кривой $R_{\omega 3}(R_m, 0)$ и область B между кривыми $R_{\omega 1}(R_m, 1)$ и $R_{\omega 2}(R_m, 0)$.

1. Детинко Ф.М. Об устойчивости работы атобалансира для динамической балансировки // Изв. АН СССР. ОТН. Мех. и Машиностр., -1956. № 4, -С.38-45.
2. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. -М.: Наука, 1971. -896с.
3. Нестеренко В.П. Учет вязкого сопротивления при определении условий балансировки // Известия Вузов. Машиностроение. -1989. -4. -4. -С.39-41.
4. Bövik P., Högfors C. Autobalancing of Rotors // J. Sound and vibr. -1986. -3, № 3. -С. 429-440.
5. Філімоніхін Г.Б. До стійкості автобалансуючого пристрою із зв'язками, накладеними на рух коригуючих вантажів // Доп. АН УРСР. Сер. А. -1990. -№ 12. -С. 26-29.
6. Найфэ А. Введение в методы возмущений: Пер. с англ. -М.: Мир, 1984. -535 с.

*Кировоградский институт
сельскохозяйственного машиностроения*

Поступило в редакцию 17.05.95